К ОСОБЕННОСТЯМ ПОВЕДЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ В ПОЛЯХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ

А. С. УСПЕНСКИЙ

АННОТАЦИЯ

В общем случае рассмотрено движение материального тела в полях тяготения другого тела, с которым связана система отсчета. На основании только 2-го закона Ньютона показано, что в этом случае масса ускоряемого тела растет по закону $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{a/\alpha}}}$, где a и α – определенные константы взаимодействующих тел. Расчет, сделанный для ряда элементарных частиц, показывает, что численное значение величины $\sqrt{a/\alpha}$ соответствует скорости света в вакууме.

Дальнейший анализ этого выражения приводит к выводу, что наряду с ростом массы происходит слабое уменьшение заряда. Зависимость изменения заряда q и массы тела m определяется выражением $\frac{dq}{dm} = -\,Const$, где значение константы определяется параметрами взаимодействующих тел и среды, в которой они находятся.

Несмотря на чрезвычайную малость изменения заряда указан эксперимент, в котором этот эффект может быть обнаружен.

§ 1. ЗАВИСИМОСТЬ МАССЫ ТЕЛА ОТ СКОРОСТИ В ПОЛЯХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ

Рассмотрим поведение тела с массой m и зарядом q в полях тяготения другого тела с массой m_0' и зарядом q_0', т.е. в полях консервативных сил. Будем считать, что $m \ll m_0'$ и $q \ll q_0'$. Тогда поведение малой частицы не будет заметно влиять на параметры центрального тела, с которым и будем связывать систему отсчета. В этом случае прирост кинетической энергии ускоряемого тела составит

$$E_k = \int_\infty^r (\overrightarrow{F_{\text{гр}}} + \overrightarrow{F_{\text{эл}}})\, d\vec{r}\ , \qquad (1)$$

где $F_{\text{гр}}$ – гравитационная сила взаимодействия тел,
$F_{\text{эл}}$ – электрическая сила взаимодействия тел,
r – расстояние между телами.

Принимая начальную кинетическую энергию малого тела равной нулю, выражение (1) можно записать в скалярном виде

$$E_k = \int_\infty^r (F_{\text{гр}} + F_{\text{эл}})\, dr\ , \qquad (2)$$

а т.к. малое тело находится в полях консервативных сил, последнее выражение можно представить в виде

$$E_k = \int_0^{\varphi_{\text{гр}}} m d\varphi_{\text{гр}} + \int_0^{\varphi_{\text{эл}}} q d\varphi_{\text{эл}} \,, \tag{3}$$

где $\varphi_{гр}$ и $\varphi_{эл}$ – гравитационный и электрический потенциалы поля центрального тела соответственно.

При этом, поскольку система отсчета связана с центральным телом, нет необходимости вводить потенциалы Лиенара – Вихерта.

Известно, что масса является функцией скорости, а, следовательно, и потенциала. Что касается заряда, то наиболее точный эксперимент показывает, что с точностью до 10^{-29} ед. СИ заряд является величиной постоянной. Однако, не делая каких-либо оговорок, можно представить заряд в общем виде как $q = q_0 + \Delta q$. Тогда выражение (3) перепишется так

$$E_k=\int_0^{\varphi_{\text{гр}}}(m+\Delta m)d\varphi_{\text{гр}}+\int_0^{\varphi_{\text{эл}}}(q_0+\Delta q)d\varphi_{\text{эл}}=\mathrm{m}_0\varphi_{\text{гр}}+\mathrm{q}_0\varphi_{\text{эл}}+\int_0^{\varphi_{\text{гр}}}\Delta m d\varphi_{\text{гр}}+\int_0^{\varphi_{\text{эл}}}\Delta q d\varphi_{\text{эл}}$$

Преобразуем последнее выражение следующим образом

$$E_k=\varphi_{\text{гр}}\left(m_0+q_0\frac{\varphi_{\text{эл}}}{\varphi_{\text{гр}}}\right)+\int_0^{\varphi_{\text{гр}}}\Delta m d\varphi_{\text{гр}}+\int_0^{\varphi_{\text{гр}}}\Delta q\frac{d\varphi_{\text{эл}}}{d\varphi_{\text{гр}}}d\varphi_{\text{гр}}=\varphi_{\text{гр}}\left(m_0+q_0\frac{\varphi_{\text{эл}}}{\varphi_{\text{гр}}}\right)+\int_0^{\varphi_{\text{гр}}}\Delta m\left(1+\frac{\Delta q}{\Delta m}\cdot\frac{d\varphi_{\text{эл}}}{d\varphi_{\text{гр}}}\right)d\varphi_{\text{гр}} \tag{4}$$

Покажем теперь, что в данном поле сил выполняется условие

$$\frac{\varphi_{\text{эл}}}{\varphi_{\text{гр}}} = \frac{d\varphi_{\text{эл}}}{d\varphi_{\text{гр}}} = Const \tag{5}$$

Действительно, в системе СИ

$$\frac{\varphi_{\text{эл}}}{\varphi_{\text{гр}}} = \frac{q_0'\cdot r}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 rGm_0'} = \frac{q_0'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 m_0'}$$

Аналогично

$$\frac{d\varphi_{\text{эл}}}{d\varphi_{\text{гр}}} = \frac{d\varphi_{\text{эл}}}{dr}\cdot\frac{dr}{d\varphi_{\text{гр}}} = \frac{q_0'\cdot r^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2\cdot Gm_0'} = \frac{q_0'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 Gm_0'}$$

Здесь G – гравитационная постоянная.

Здесь можно еще раз отметить следующее: условие (5) получено в предположении, что центральное тело покоится, т.е. движение малого тела не оказывает на центральное тело никакого видимого воздействия (что и было оговорено вначале). Если же считать, что движется и центральное тело, создающее поля, то вместо обычных потенциалов мы должны перейти к потенциалам Лиенара – Вихерта. Легко показать, что и в этом случае условие (5) выполняется, т.е. можно не делать предварительных оговорок относительно параметров взаимодействующих тел. Это, кстати, следует и из того, что система отсчета связана с центральным телом.

Введем теперь для краткости записи обозначение

$$a = m_0 + q_0\frac{\varphi_{\text{эл}}}{\varphi_{\text{гр}}} \tag{6}$$

и

$$x = 1 + \frac{\Delta q}{\Delta m}\cdot\frac{d\varphi_{\text{эл}}}{d\varphi_{\text{гр}}} \tag{7}$$

Тогда выражение (4) примет вид

$$E_k = a\varphi_{\text{гр}} + \int_0^{\varphi_{\text{гр}}} \Delta m x d\varphi_{\text{гр}} \quad (8)$$

В то же время на основании второго закона Ньютона выражение (2) можно записать так:

$$E_k = \int_\infty^r (F_{\text{гр}} + F_{\text{эл}})\, dr = \int_\infty^r F_{\text{равн}}\, dr = \int_\infty^r \frac{d(mV)}{dt}\, dr = \int_0^{mr} V d(mV) = \int_0^{mr} \frac{mVd(mV)}{m},$$

где $F_{\text{равн}}$ – равнодействующая сила, действующая на малое тело.

Дифференцируем это выражение по импульсу:

$$\frac{dE_k}{dP} = \frac{P_p}{m_p}$$

Здесь индексы p означают, что значение импульса и массы соответствуют верхнему (переменному) пределу определенного интеграла. В дальнейшем для краткости записи такие индексы будут опущены. Из последнего выражения следует

$$\int_0^{E_k} m dE_k = \int_0^P P dP = \frac{m^2V^2}{2}$$

или

$$V^2 = \frac{2}{m^2}\int_0^{E_k} m dE_k \quad (9)$$

Решая теперь совместно уравнения (8) и (9) получим

$$V^2 = \frac{2}{m^2}\int_0^{E_k} m dE_k = \frac{2}{m^2}\int_0^{\varphi_{\text{гр}}} m \frac{dE_k}{d\varphi_{\text{гр}}} d\varphi_{\text{гр}} = \frac{2}{m^2}\int_0^{\varphi_{\text{гр}}} m(a + x\Delta m)\, d\varphi_{\text{гр}}$$

или

$$V^2 = \frac{2a}{m^2}\int_0^{\varphi_{\text{гр}}} m d\varphi_{\text{гр}} + \frac{2}{m^2}\int_0^{\varphi_{\text{гр}}} x\Delta m m\, d\varphi_{\text{гр}} \quad (10)$$

Для краткости записи введем обозначение

$$\frac{2}{m^2}\int_0^{\varphi_{\text{гр}}} x\Delta m m\, d\varphi_{\text{гр}} = \mathrm{P}(\varphi_{\text{гр}}),$$

а т.к. $m = m_0 + \Delta m$, выражение (10) представим в виде

$$V^2 = \frac{2am_0\varphi_{\text{гр}}}{m^2} + \frac{2a}{m^2}\int_0^{\varphi_{\text{гр}}} \Delta m\, d\varphi_{\text{гр}} + \mathrm{P}(\varphi_{\text{гр}}) \quad (11)$$

Для дальнейшего расчета необходимо знать вид функции $\Delta m(\varphi_{\text{гр}})$. Ее можно получить из специальной теории относительности (СТО) при условии постоянства заряда (т.е. $x = 1$). Но поскольку мы условились не делать каких-либо предварительных оговорок, поступим иначе. Представим функцию $\Delta m(\varphi_{\text{гр}})$ следующим образом

$$\Delta m = \alpha\varphi_{\text{гр}} + (\Delta\mathrm{m} - \alpha\varphi_{\text{гр}}) = \alpha\varphi_{\text{гр}} + \ell(\varphi_{\text{гр}}), \quad (12)$$

где $\ell(\varphi_{\text{гр}}) = \Delta\mathrm{m} - \alpha\varphi_{\text{гр}}$,

а α – какая-то положительная константа ($\alpha > 0$).

Решая теперь совместно (11) и (12), получим

$$V^2 = \frac{2am_0\varphi_{гр}}{m^2} + \frac{2a}{m^2}\int_0^{\varphi_{гр}}[\alpha\,\varphi_{гр} + (\varphi_{гр})]\,d\varphi_{гр} + \mathrm{P}(\varphi_{гр}) =$$

$$= \frac{2am_0\varphi_{гр}}{m^2} + \frac{a\alpha{\varphi_{гр}}^2}{m^2} + \frac{2a}{m^2}\int_0^{\varphi_{гр}}\ell(\varphi_{гр})d\varphi_{гр} + \mathrm{P}(\varphi_{гр}) = \frac{a\varphi_{гр}}{m^2}(2\mathrm{m}_0+\alpha\varphi_{гр}) + t(\varphi_{гр})\,,$$

где $t(\varphi_{гр}) = \frac{2a}{m^2}\int_0^{\varphi_{гр}}\ell(\varphi_{гр})d\varphi_{гр} + \mathrm{P}(\varphi_{гр})$ (13)

Теперь совместное решение уравнений (12) и (13) дает

$$V^2 = \frac{a\varphi_{гр}}{m^2}[2m_0+\Delta m - \ell(\varphi_{гр})] + \mathrm{t}(\varphi_{гр}) = \frac{a\varphi_{гр}}{m^2}(2m_0+\Delta m) - \frac{a\varphi_{гр}}{m^2}\ell(\varphi_{гр}) + \mathrm{t}(\varphi_{гр}) = \frac{a\varphi_{гр}}{m^2}(2m_0+\Delta m) + \mathrm{E}(\varphi_{гр}), \quad (14)$$

где $E(\varphi_{гр}) = t\,(\varphi_{гр}) - \frac{a\varphi_{гр}}{m^2}\,\ell(\varphi_{гр})$

Из зависимости (12) выражаем гравитационный потенциал

$$\varphi_{гр} = \frac{\Delta m - \ell(\varphi_{гр})}{\alpha}\,,$$

что после подстановки в уравнение (14) дает

$$V^2 = \frac{a}{m^2}\left[\frac{\Delta m}{\alpha} - \frac{\ell(\varphi_{гр})}{\alpha}\right](\mathrm{m}+\mathrm{m}_0) + E(\varphi_{гр}) = \frac{a\,(m+m_0)}{m^2}\cdot\frac{\Delta m}{\alpha} - \frac{a\,(m+m_0)}{m^2}\cdot\frac{\ell(\varphi_{гр})}{\alpha} + E(\varphi_{гр}) = \frac{a\,(m+m_0)\Delta m}{\alpha m^2} + \mathrm{C}(\varphi_{гр}), \quad (15)$$

где $C(\varphi_{гр}) = E(\varphi_{гр}) - \frac{a\,(m+m_0)}{m^2}\cdot\frac{\ell(\varphi_{гр})}{\alpha}$ (16)

Т.к. $\Delta m = m - m_0$, уравнение (15) можно записать так

$$V^2 = \frac{a\,(m+m_0)(m-m_0)}{\alpha m^2} + C(\varphi_{гр}) = \frac{a}{\alpha}\cdot\frac{m^2-{m_0}^2}{m^2} + C(\varphi_{гр}) = \frac{a}{\alpha}\left[1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right] + C(\varphi_{гр}),$$

откуда следует

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{a/\alpha} + \frac{\alpha}{a}\,C(\varphi_{гр})}} \quad (17)$$

Очевидно, что задача будет решена в том случае, если удастся определить в явном виде функцию $C(\varphi_{гр})$. Однако, т.к. $C(\varphi_{гр})$ зависимости от Δm, Δq и V, то получается вроде бы замкнутый круг. Чтобы разорвать его, проводится следующая операция: функция $C\,(\varphi_{гр})$ выражается через другую функцию, решение для которой удается найти. Последовательность дальнейших рассуждений следующая: вначале запишем гравитационный потенциал в виде

$$\varphi_{гр} = \frac{\Delta m}{\Delta m/\varphi_{гр}}$$

и подставим это выражение в уравнение (14). Тогда получим

$$V^2 = \frac{a\Delta m}{m^2\Delta m/\varphi_{гр}}(2m_0+\Delta m) + \mathrm{E}(\varphi_{гр}) = \frac{a\,(m-m_0)(m+m_0)}{m^2\Delta m/\varphi_{гр}} + E(\varphi_{гр}) = \frac{a(m^2-{m_0}^2)\varphi_{гр}}{m^2\Delta m} + \mathrm{E}(\varphi_{гр}) = \frac{a\varphi_{гр}}{\Delta m}\left[1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right] + E(\varphi_{гр})$$

Решая последнее уравнение относительно m, получим

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{a\varphi_{гр}/\Delta m} + \frac{E(\varphi_{гр})\Delta m}{a\varphi_{гр}}}}$$

или

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - V^2\left[\frac{\Delta m}{a\varphi_{\text{гр}}} - \frac{\Delta m E(\varphi_{\text{гр}})}{a\varphi_{\text{гр}} V^2}\right]}} \tag{18}$$

Введя опять для краткости записи обозначение

$$\frac{\Delta m}{a\varphi_{\text{гр}}} - \frac{\Delta m E(\varphi_{\text{гр}})}{a\varphi_{\text{гр}} V^2} = n(\varphi_{\text{гр}}) \tag{19}$$

можем делить на эту функцию, т.к. $n(\varphi_{\text{гр}}) \neq 0$ (иначе $m = Const$), т.е.

$$f(\varphi_{\text{гр}}) = \frac{1}{n(\varphi_{\text{гр}})}\,, \tag{20}$$

что после подстановки в равенство (18) дает

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{f(\varphi_{\text{гр}})}}} \tag{21}$$

Теперь будем определять вид функции $f(\varphi_{\text{гр}})$. Для этого запишем вначале для нее дифференциальное уравнение. Из равенства (21) следует

$$V^2 = f(\varphi_{\text{гр}})[1 - (\frac{m_0}{m})^2] \tag{22}$$

Поскольку из уравнения (9) имеем

$$m^2V^2 = 2\int_0^{E_k} m dE_k\,,$$

то

$$2\int_0^{E_k} m dE_k = f(\varphi_{\text{гр}})(m^2 - m_0{}^2) = 2\int_{m_0}^{m} m\frac{dE_k}{dm}\,dm \tag{23}$$

Теперь дифференцируем это выражение по массе

$$2m\frac{dE_k}{dm} = (m^2 - m_0{}^2)\frac{df(\varphi_{\text{гр}})}{dm} + 2mf(\varphi_{\text{гр}})$$

или

$$\frac{df(\varphi_{\text{гр}})}{dm} + \frac{2m}{m^2 - m_0{}^2}f(\varphi_{\text{гр}}) = \frac{2m}{m^2 - m_0{}^2} \cdot \frac{dE_k}{dm} \tag{24}$$

В результате получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно функции $f(\varphi_{\text{гр}})$. Используя зависимость (23) его можно свернуть в линейное однородное уравнение. Т.к. из (19) имеем

$$\frac{2}{m^2 - m_0{}^2} = \frac{f(\varphi_{\text{гр}})}{\int_0^{E_k} m dE_k}\,,$$

то

$$\frac{2m}{m^2 - m_0{}^2} \cdot \frac{dE_k}{dm} = \frac{mf(\varphi_{\text{гр}})}{\int_0^{E_k} m dE_k} \cdot \frac{dE_k}{dm}$$

и после подстановки этого выражения в уравнение (24) получаем линейное однородное уравнение

$$\frac{df(\varphi_{\text{гр}})}{dm}+[\frac{2m}{m^2-m_0{}^2}-\frac{m\frac{dE_k}{dm}}{\int_0^{E_k}mdE_k}]\,f(\varphi_{\text{гр}})=0 \tag{25}$$

Дальнейшие рассуждения сводятся к отысканию вида функции $f(\varphi_{\text{гр}})$, т.е. к решению уравнения (25). При этом осуществляется следующий план:

1. функция $f(\varphi_{\text{гр}})$ выражается через функцию $C(\varphi_{\text{гр}})$;
2. записывается дифференциальное уравнение для функции $C(\varphi_{\text{гр}})$;
3. по этому уравнению находится частное решение $C_1(\varphi_{\text{гр}})$;
4. записывается частное решение уравнения (25);
5. по частному решению $f_1(\varphi_{\text{гр}})$ находится общее решение уравнения (25).

Приступаем к осуществлению этого плана.

1. Из сравнения зависимостей (17) и (21) следует

$$1-\frac{V^2}{a/_{\alpha}}+\frac{\alpha}{a}\,C(\varphi_{\text{гр}})=1-\frac{V^2}{f(\varphi_{\text{гр}})}=1-V^2[\frac{\alpha}{a}-\frac{\alpha C(\varphi_{\text{гр}})}{aV^2}]$$

или

$$f(\varphi_{\text{гр}})=\frac{a/_{\alpha}}{1-\frac{C(\varphi_{\text{гр}})}{V^2}},$$

что совместно с выражением (22) дает

$$f(\varphi_{\text{гр}})=\frac{a/_{\alpha}}{1-\frac{m^2C(\varphi_{\text{гр}})}{(m^2-m_0{}^2)f(\varphi_{\text{гр}})}}$$

или

$$f(\varphi_{\text{гр}})=\frac{a}{\alpha}+\frac{m^2}{m^2-m_0{}^2}\cdot C(\varphi_{\text{гр}}) \tag{26}$$

2. Используя выражение (23) запишем

$$\frac{2\int_0^{E_k}mdE_k}{m^2-m_0{}^2}=\frac{a}{\alpha}+\frac{m^2}{m^2-m_0{}^2}\cdot C(\varphi_{\text{гр}})$$

Дифференцируя по массе, получим

$$\frac{2m\frac{dE_k}{dm}(m^2-m_0{}^2)-4m\int_0^{E_k}mdE_k}{(m^2-m_0{}^2)^2}=\frac{[2m(m^2-m_0{}^2)-2m^3]C(\varphi_{\text{гр}})}{(m^2-m_0{}^2)^2}+\frac{m^2}{m^2-m_0{}^2}\cdot\frac{dC(\varphi_{\text{гр}})}{dm},$$

откуда следует

$$2m(m^2-m_0{}^2)\,\frac{dE_k}{dm}-4m\int_0^{E_k}mdE_k=[2m(m^2-m_0{}^2)-2m^3]C(\varphi_{\text{гр}})+m^2(m^2-m_0{}^2)\cdot\frac{dC(\varphi_{\text{гр}})}{dm}$$

и $\frac{dC(\varphi_{\text{гр}})}{dm}+\frac{[2m(m^2-m_0{}^2)-2m^3]}{m^2(m^2-m_0{}^2)}\,C(\varphi_{\text{гр}})=\frac{2m(m^2-m_0{}^2)\frac{dE_k}{dm}-4m\int_0^{E_k}mdE_k}{m^2(m^2-m_0{}^2)}$

или

$$\frac{dC(\varphi_{\text{гр}})}{dm}+[\frac{2}{m}-\frac{2m}{(m^2-m_0{}^2)}]\,C(\varphi_{\text{гр}})=\frac{2}{m}\cdot\frac{dE_k}{dm}-\frac{4\int_0^{E_k}mdE_k}{m(m^2-m_0{}^2)} \tag{27}$$

3. Покажем теперь, что частным решением линейного неоднородного уравнения (27) является решение

$$C_1(\varphi_{\text{гр}}) = \frac{2\int_0^{E_k} m dE_k}{m^2} \qquad (28)$$

Для этого сначала найдем производную $\frac{dC_1(\varphi_{\text{гр}})}{dm}$

$$\frac{dC_1(\varphi_{\text{гр}})}{dm} = \frac{2m^3\frac{dE_k}{dm} - 4m\int_0^{E_k} m dE_k}{m^4} = \frac{2}{m}\cdot\frac{dE_k}{dm} - \frac{4}{m^3}\int_0^{E_k} m dE_k \qquad (29)$$

Тогда подстановка выражений (28) и (29) в уравнение (27) приводит к тождеству

$$\frac{2}{m}\cdot\frac{dE_k}{dm} - \frac{4}{m^3}\int_0^{E_k} m dE_k + [\frac{2}{m} - \frac{2m}{m^2 - {m_0}^2}]\cdot\frac{2\int_0^{E_k} m dE_k}{m^2} = \frac{2}{m}\cdot\frac{dE_k}{dm} - \frac{4}{m^3}\int_0^{E_k} m dE_k + \frac{4}{m^3}\int_0^{E_k} m dE_k - \frac{4\int_0^{E_k} m dE_k}{m(m^2 - {m_0}^2)}$$

,

т.е. имеем тождество

$$\frac{dC_1(\varphi_{\text{гр}})}{dm} + [\frac{2}{m} - \frac{2m}{m^2 - {m_0}^2}]\, C_1(\varphi_{\text{гр}}) = \frac{2}{m}\cdot\frac{dE_k}{dm} - \frac{4\int_0^{E_k} m dE_k}{m(m^2 - {m_0}^2)}$$

Следовательно, решение (28) действительно является частным решением уравнения (27).

4. На основании выражения (26) можно записать

$$f_1(\varphi) = \frac{a}{\alpha} + \frac{m^2}{m^2 - {m_0}^2}\cdot C(\varphi_{\text{гр}})\ ,$$

что после подстановки частного решения (28) дает

$$f_1(\varphi_{\text{гр}}) = \frac{a}{\alpha} + \frac{m^2}{m^2 - {m_0}^2}\cdot\frac{2\int_0^{E_k} m dE_k}{m^2} = \frac{a}{\alpha} + \frac{2\int_0^{E_k} m dE_k}{m^2 - {m_0}^2}$$

Тогда с учетом выражения (23) получим

$$f_1(\varphi_{\text{гр}}) = \frac{a}{\alpha} + f(\varphi_{\text{гр}})$$

или

$$f(\varphi_{\text{гр}}) = f_1(\varphi_{\text{гр}}) - \frac{a}{\alpha} \qquad (30)$$

5. Т.к. из уравнения (25) следует, что должно выполняться условие

$$\frac{df_1(\varphi_{\text{гр}})}{dm} + [\frac{2m}{m^2 - {m_0}^2} - \frac{m\frac{dE_k}{dm}}{\int_0^{E_k} m dE_k}]\, f_1(\varphi_{\text{гр}}) = 0,$$

то подстановка общего решения (30) в уравнение (25) приводит к результату

$$\frac{a}{\alpha}\,[\frac{2m}{m^2 - {m_0}^2} - \frac{m\frac{dE_k}{dm}}{\int_0^{E_k} m dE_k}] = 0,$$

откуда следует

$$\frac{2\int_0^{E_k} m dE_k}{m^2 - {m_0}^2} = \frac{dE_k}{dm} = f(\varphi_{\text{гр}}), \qquad (31)$$

а т.к. из уравнения (24) следует

$$\frac{df(\varphi_{\text{гр}})}{dm} = \frac{2m}{m^2 - m_0{}^2}\left[\frac{dE_k}{dm} - f(\varphi_{\text{гр}})\right],$$

то, подставляя сюда полученный результат (31), получаем

$$\frac{df(\varphi_{\text{гр}})}{dm} = 0$$

или

$$f(\varphi_{\text{гр}}) = Const \tag{32}$$

Возвращаясь теперь к уравнению (21), можем записать

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{Const}}}\,, \tag{33}$$

а из соображений размерности видим, что $f(\varphi_{\text{гр}})$ имеет размерность квадрата скорости ($f(\varphi_{\text{гр}})>0$), т.е.

$[f(\varphi_{\text{гр}})] = [Const] = [C^2]$,

где C – какая-то постоянная (предельная) скорость.

Тогда зависимость (33) можно представить в виде

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}\,, \tag{34}$$

т.е. получим привычную зависимость $m(V)$, следуемую из СТО. Однако, по сравнению со СТО зависимость (34) имеет ряд особенностей, а именно:

1. неизвестно значение константы C. Пока только эксперимент и СТО указывают, что C равняется скорости света в вакууме;
2. зависимость (34) получена без каких-либо предположений о виде функции $q(r)$. Точнее, зависимость (34) допускает любой (!) вид этой функции.

Выяснению этих неясностей и будет посвящен дальнейший анализ.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОГО СМЫСЛА КОНСТАНТЫ C

Определим значение константы C в выражении (34). Решая совместно (19), (20) и (32), получим

$$\frac{\Delta m}{a\varphi_{\text{гр}}} - \frac{\Delta m E(\varphi_{\text{гр}})}{a\varphi_{\text{гр}} V^2} = \frac{1}{C^2}\,,$$

что с учетом зависимости (22) дает

$$\frac{\Delta m}{a\varphi_{\text{гр}}} - \frac{\Delta m E(\varphi_{\text{гр}})}{a\varphi_{\text{гр}} C^2[1 - (\frac{m_0}{m})^2]} = \frac{1}{C^2}$$

или

$$\frac{\Delta m}{a\varphi_{\text{гр}}} = \frac{1}{C^2}\left\{1 + \frac{\Delta m E(\varphi_{\text{гр}})}{a\varphi_{\text{гр}}[1 - (\frac{m_0}{m})^2]}\right\}$$

и

$$\frac{C^2\Delta m}{a\varphi_{\text{гр}}} = 1 + \frac{\Delta m E(\varphi_{\text{гр}})}{a\varphi_{\text{гр}}[1-(\frac{m_0}{m})^2]}$$

Но, как следует из зависимостей (31) и (32)

$$E_k = C^2\Delta m\ , \tag{35}$$

Следовательно, с учетом выражения (8) можем записать

$$\frac{E_k}{a\varphi_{\text{гр}}} = \frac{a\varphi_{\text{гр}} + \int_0^{\varphi_{\text{гр}}} x\Delta m d\varphi_{\text{гр}}}{a\varphi_{\text{гр}}} = 1 + \frac{\int_0^{\varphi_{\text{гр}}} x\Delta m d\varphi_{\text{гр}}}{a\varphi_{\text{гр}}} = 1 + \frac{\Delta m E(\varphi_{\text{гр}})}{a\varphi_{\text{гр}}[1-(\frac{m_0}{m})^2]}$$

откуда следует

$$\int_0^{\varphi_{\text{гр}}} x\Delta m d\varphi_{\text{гр}} = \frac{\Delta m E(\varphi_{\text{гр}})}{1-(\frac{m_0}{m})^2} = \frac{m^2 E(\varphi_{\text{гр}})}{m+m_0}$$

или

$$E(\varphi_{\text{гр}}) = \frac{m+m_0}{m^2}\int_0^{\varphi_{\text{гр}}} x\Delta m d\varphi_{\text{гр}} \tag{36}$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (16), получим

$$C(\varphi_{\text{гр}}) = \frac{m+m_0}{m^2}\left[\int_0^{\varphi_{\text{гр}}} x\Delta m d\varphi_{\text{гр}} - \frac{a}{\alpha}\ \ell(\varphi_{\text{гр}})\right]$$

В то же время из зависимости (26) имеем

$$C(\varphi_{\text{гр}}) = \frac{m^2-{m_0}^2}{m^2}\left[f(\varphi_{\text{гр}}) - \frac{a}{\alpha}\right]$$

Приравнивая правые части двух последних выражений, получим

$$\frac{m+m_0}{m^2}\left[\int_0^{\varphi_{\text{гр}}} x\Delta m d\varphi_{\text{гр}} - \frac{a}{\alpha}\ \ell(\varphi_{\text{гр}})\right] = \frac{m^2-{m_0}^2}{m^2}\left[f(\varphi_{\text{гр}}) - \frac{a}{\alpha}\right]$$

или

$$\int_0^{\varphi_{\text{гр}}} x\Delta m d\varphi_{\text{гр}} - \frac{a}{\alpha}\ \ell(\varphi_{\text{гр}}) = \Delta m\left[f(\varphi_{\text{гр}}) - \frac{a}{\alpha}\right]$$

откуда следует

$$\frac{\int_0^{\varphi_{\text{гр}}} x\Delta m d\varphi_{\text{гр}} - \frac{a}{\alpha}\ell(\varphi_{\text{гр}})}{\Delta m} = f(\varphi_{\text{гр}}) - \frac{a}{\alpha} = Const' \tag{37}$$

Дифференцируя это выражение по $\varphi_{\text{гр}}$, получим

$$\left[x\Delta m - \frac{a}{\alpha}\cdot\frac{d\ell(\varphi_{\text{гр}})}{d\varphi_{\text{гр}}}\right]\Delta m - \frac{dm}{d\varphi_{\text{гр}}}\left[\int_0^{\varphi} x\Delta m d\varphi_{\text{гр}} - \frac{a}{\alpha}\ \ell(\varphi_{\text{гр}})\right] = 0$$

или с учетом зависимости (37)

$$\left[x\Delta m - \frac{a}{\alpha}\cdot\frac{d\ell(\varphi_{\text{гр}})}{d\varphi_{\text{гр}}}\right]\Delta m = \frac{dm}{d\varphi_{\text{гр}}}\left[f(\varphi_{\text{гр}}) - \frac{a}{\alpha}\right]\Delta m\ ,$$

т.е. $x\Delta m - \frac{a}{\alpha}\cdot\frac{d\ell(\varphi_{\text{гр}})}{d\varphi_{\text{гр}}} = \frac{dm}{d\varphi_{\text{гр}}}\left[f(\varphi_{\text{гр}}) - \frac{a}{\alpha}\right]$

Подставляя сюда значение функции $\ell(\varphi_{\text{гр}})$ из выражения (12), получим

$$x\Delta m - \frac{a}{\alpha}\left(\frac{dm}{d\varphi_{\text{гр}}} - \alpha\right) = \frac{dm}{d\varphi_{\text{гр}}}\left[f(\varphi_{\text{гр}}) - \frac{a}{\alpha}\right]$$

или $$x\Delta m + a = f(\varphi_{гр})\ \frac{dm}{d\varphi_{гр}} \qquad (38)$$

Тогда из начальных условий ($\varphi_{гр} = 0$) следует

$$a = f_0\big(\varphi_{гр}\big)\cdot\Big(\frac{dm}{d\varphi_{гр}}\Big)_{\varphi_{гр}=0} = f_0\big(\varphi_{гр}\big)\cdot\Big(\frac{dm}{d\varphi_{гр}}\Big)_0$$

Из этого выражения следует важный с физической точки зрения вывод

$$\Big(\frac{dm}{d\varphi_{гр}}\Big)_0 \neq 0\ , \qquad (39)$$

т.к. в противном случае мы обязаны положить $f_0\big(\varphi_{гр}\big) = \infty$, что, в свою очередь, приводит к результату $m = Const$. Следовательно, можно записать

$$f(\varphi_{гр}) = \frac{a}{\big(\frac{dm}{d\varphi_{гр}}\big)_0}\ , \qquad (40)$$

а т.к. константа α в выражении (12) выбрана произвольно, то можно положить

$$\alpha = \Big(\frac{dm}{d\varphi_{гр}}\Big)_0 \qquad (41)$$

Возвращаясь теперь к зависимости (34), можем записать

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{a/\alpha}}} \qquad (42)$$

Остается только определить, насколько эта формула количественно соответствует формуле СТО, т.е. насколько величина $\sqrt{a/\alpha}$ соответствует скорости света в вакууме. Этим и займемся далее.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОНСТАНТ *a* и *α*

Поскольку a и α – это параметры взаимодействующих тел, то и расчет их для каждой пары тел индивидуален. В данной работе рассмотрено взаимодействие 3-х пар частиц:

электрон – протон ${}_0e^1 \rightarrow {}_1H^1$
электрон – α-частица ${}_0e^1 \rightarrow {}_2He^4$
электрон – дейтерий ${}_0e^1 \rightarrow {}_1Де^2$

Что касается величины a, то она рассчитывается просто. Как следует из (6)

$$a = m_0 + q_0\,\frac{\varphi_{эл}}{\varphi_{гр}}\ ,$$

или после преобразований

$$a = m_0 + q_0\,\frac{q_0'}{4\pi E E_0\cdot G m_0'}$$

Тогда для пары ${}_0e^1 \rightarrow {}_1H^1$ имеем (в системе СИ)

$$a_1 = 9{,}1\cdot10^{-31} + \frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}}{4\cdot3{,}14\cdot1\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot1{,}67\cdot10^{-27}} = 2{,}0675913\cdot10^{9}\ (кг)$$

или $a_1 \cong 2{,}068 \cdot 10^9$ (кг)

Для пары $_0e^1 \rightarrow {}_2He^4$ находим

$$a_2 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} + \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}64 \cdot 10^{-27}} = 1{,}0400239 \cdot 10^9$$

или $a_2 = 1{,}040 \cdot 10^9$ (кг)

Для пары $_0e^1 \rightarrow {}_1Де^2$

$$a_3 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} + \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3{,}34 \cdot 10^{-27}} = 1{,}0337956 \cdot 10^9$$

или $a_3 \cong 1{,}034 \cdot 10^9$ (кг)

Намного сложнее ситуация с расчетом величины α. Рассчитать ее напрямую не удается, но все же можно достаточно точно оценить ее величину из условия малых скоростей, т.е. тогда, когда релятивистскими эффектами можно пренебречь.

Т.к. функция $\Delta m = m - m_0$ непрерывна и непрерывно дифференцируема на всем интервале $0 - \varphi_{гр}$, то ее можно представить в виде ряда

$$\Delta m = \alpha\varphi_{гр} + \beta\varphi_{гр}{}^2 + \gamma\varphi_{гр}{}^3 + \ldots + к\varphi_{гр}{}^n + \ldots \quad (43)$$

Тогда при малых скоростях ($\varphi_{гр} \rightarrow 0$) можно записать

$$\Delta m = \alpha\varphi_{гр} \quad (44)$$

и с учетом (42) имеем

$$m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{a}V^2}} - 1\right) = \alpha\varphi_{гр} \quad (45)$$

После несложных преобразований это уравнение приходит к виду

$$\alpha^2 + \frac{m_0}{\varphi_{гр}}\left(2 - \frac{a\varphi_{гр}}{m_0 V^2}\right)\alpha + \frac{m_0{}^2}{\varphi_{гр}{}^2}\left(1 - \frac{2a\varphi_{гр}}{m_0 V^2}\right) = 0$$

и теперь, решая его как обычное квадратное уравнение относительно α, получим

$$\alpha = \frac{m_0}{\varphi_{гр}}\left[\left(\frac{a\varphi_{гр}}{2m_0 V^2} - 1\right) + \sqrt{\frac{a\varphi_{гр}}{m_0 V^2}\left(\frac{a\varphi_{гр}}{4m_0 V^2} + 1\right)}\right] \quad (46)$$

Перед корнем стоит знак +, т.к. первое слагаемое в квадратных скобках – величина отрицательная.

Теперь задавая определенную величину $\varphi_{гр}$ (или V^2) можно по приближенной формуле $\frac{m_0 V^2}{2} = q\varphi_{эл}$ рассчитать значение V^2 (или $\varphi_{гр}$) и по формуле (46) рассчитать величину α.

Расчет показывает, что для всех пар рассмотренных частиц выполняется условие

$10^{-9} < \alpha < 10^{-7}$

При этом для пары $_0e^1 \rightarrow {}_1H^1$ при $\alpha_1 = 2{,}30 \cdot 10^{-8}$

$\sqrt{\frac{a}{\alpha}}$ = 2,998·10^8 (м/с)

Для пары $_0e^1 \rightarrow {}_2He^4$ при α_2 = 1,16·10^{-8}

$\sqrt{\frac{a}{\alpha}}$ = 2,994·10^8 (м/с)

Для пары $_0e^1 \rightarrow {}_1Де^2$ при α_3 = 1,15·10^{-8}

$\sqrt{\frac{a}{\alpha}}$ = 2,998·10^8 (м/с)

Т.е., видимо, можно говорить, что формула (42) не только качественно, но и количественно совпадает с известной формулой СТО.

А теперь подведем предварительные итоги.

Исходя только из 2-го закона Ньютона получено выражение

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{a}V^2}},$$

где $\sqrt{\frac{a}{\alpha}}$ с достаточной точностью соответствует скорости света в вакууме.

Как следствие из него вытекают еще две формулы

$$E_k = \frac{a}{\alpha}\Delta m$$

и $E_п = \frac{a}{\alpha}m$

где $E_п$ – полная энергия тела.

Но все эти выражения уже известны из СТО. Казалось бы, ничего нового, разве что появляются некоторые сомнения по поводу приоритета.

Ведь до сих пор считалось, что механика Ньютона вытекает из СТО при малых скоростях. Здесь же получается все наоборот: релятивистские эффекты вытекают из механики Ньютона при $V^2 \rightarrow {}^{a}/_{\alpha}$. Но этот дискуссионный вопрос оставим на будущее. Пора поговорить о том, что же принципиально нового можно извлечь из предыдущего анализа.

§ 4. ИЗМЕНЕНИЕ ЗАРЯДА ТЕЛ СО СКОРОСТЬЮ

Вначале покажем, что совокупность условий

$$\begin{cases} m \neq Const \\ q = Const \end{cases} \tag{47}$$

внутренне противоречива и не может иметь место. Доказательство будем вести от обратного, т.е. пока будем считать, что условие (47) выполняется и посмотрим, что из этого следует.

Затем рассмотрим, что происходит с зарядом при граничных скоростях, т.е. при V → 0 ($\varphi_{гр} \rightarrow 0$) и при $V^2 \rightarrow {}^{a}/_{\alpha}$ ($\varphi_{гр} \rightarrow \infty$).

Анализ системы (47)

Совокупность уравнений (40), (41) и (38) позволяет записать

$$\frac{dm}{d\varphi_{гр}} = \alpha + \frac{\alpha}{a} x\Delta m \qquad (48)$$

а ранее (43) отмечалось, что функцию Δm $(\varphi_{гр})$ можно представить в виде бесконечного ряда

$\Delta m = \alpha\varphi_{гр} + \beta{\varphi_{гр}}^2 + \gamma{\varphi_{гр}}^3 + \ldots + к{\varphi_{гр}}^n + \ldots$

Тогда $\frac{dm}{d\varphi_{гр}} = \alpha + 2\beta\varphi_{гр} + 3\gamma{\varphi_{гр}}^2 + \ldots + кn{\varphi_{гр}}^{n-1} + \ldots$ (49)

Сравним теперь зависимости (48) и (49)

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{d\varphi_{гр}} = \alpha + \dfrac{\alpha}{a} x\Delta m = \alpha + \dfrac{\alpha}{a} x \left(\alpha\varphi_{гр} + \beta{\varphi_{гр}}^2 + \gamma{\varphi_{гр}}^3 + \ldots + к{\varphi_{гр}}^n + \ldots\right) \\ \dfrac{dm}{d\varphi_{гр}} = \alpha + 2\beta\varphi_{гр} + 3\gamma{\varphi_{гр}}^2 + \ldots + кn{\varphi_{гр}}^{n-1} + \ldots \end{cases}$$

Поскольку мы пока считаем, что условие (47) выполняется (т.е. x=1), то полученную систему можно переписать так

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{d\varphi_{гр}} = \alpha + \dfrac{\alpha^2}{a}\varphi_{гр} + \dfrac{\alpha\beta}{a}{\varphi_{гр}}^2 + \dfrac{\alpha\gamma}{a}{\varphi_{гр}}^3 + \ldots + \dfrac{\alpha к}{a}{\varphi_{гр}}^n + \ldots & (50) \\ \dfrac{dm}{d\varphi_{гр}} = \alpha + 2\beta\varphi_{гр} + 3\gamma{\varphi_{гр}}^2 + \ldots + кn{\varphi_{гр}}^{n-1} + \ldots & (51) \end{cases}$$

Можно отметить две странности полученной системы: сколько бы не брали членов разложения функции $\Delta m(\varphi_{гр})$, правая часть производной (50) содержит (n+1) членов, в то время как в нижней производной (51) в правой части n членов. Вторая странность заключается в том, что порядок степени верхней производной на единицу больше, чем нижней.

Посмотрим, что отсюда следует.

Решая совместно (50) и (51) и сокращая на $\varphi_{гр}$ получим

$$\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\alpha\beta}{a}\varphi_{гр} + \frac{\alpha\gamma}{a}{\varphi_{гр}}^2 + \ldots + \frac{\alpha к}{a}{\varphi_{гр}}^{n-1} = 2\beta + 3\gamma\varphi_{гр} + \ldots + кn{\varphi_{гр}}^{n-2} + \ldots \qquad (52)$$

откуда из начальных условий ($\varphi_{гр}$= 0) следует

$$\frac{\alpha^2}{a} = 2\beta \qquad (53)$$

Тогда равенство (52) опять после сокращения на $\varphi_{гр}$ и исключив (53) можно записать так

$$\frac{\alpha\beta}{a} + \frac{\alpha\gamma}{a}\varphi_{гр} + \ldots + \frac{\alpha к}{a}{\varphi_{гр}}^{n-2} = 3\gamma + \ldots + кn{\varphi_{гр}}^{n-3} + \ldots$$

откуда опять же из начальных условий имеем

$\frac{\alpha\beta}{a} = 3\gamma$

Проделав эту процедуру еще (n–3) раз, получим в итоге

$\frac{\alpha\text{к}}{a}\ \varphi_{\text{гр}} = 0$

Последнее равенство может иметь смысл только в случае κ=0. Следовательно, первые части производных (50) и (51) мы должны сократить на последний член. Но, сократив на последний, мы должны на основании предыдущих рассуждений сократить и на предпоследний и т.д. до тех пор, пока система (50), (51) не примет вид

$$\begin{cases} \frac{dm}{d\varphi_{\text{гр}}} = \alpha + \frac{\alpha^2}{a}\varphi_{\text{гр}} \\ \quad \frac{dm}{d\varphi_{\text{гр}}} = \alpha \end{cases} \tag{54}$$

Эта система имеет право на жизнь только в случае α = 0 (т.е. m = *Const*), следовательно, условие (47), из которого мы исходили, действительно внутренне противоречиво и $q \neq$ *Const*.

§ 5. ИЗМЕНЕНИЕ ЗАРЯДА ТЕЛ ПРИ ГРАНИЧНЫХ СКОРОСТЯХ

Вначале рассмотрим, что происходит с зарядом тела при малых скоростях, т.е. при $\varphi_{\text{гр}} \to 0$.

Из (48) следует

$$\frac{dm}{d\varphi_{\text{гр}}} = \alpha + \frac{\alpha}{a}x\Delta m$$

Решая это уравнение относительно Δm, получим

$$\Delta m = e^{\frac{\alpha}{a}\int x d\varphi_{\text{гр}}}(C + \alpha\int e^{-\frac{\alpha}{a}\int x d\varphi_{\text{гр}}} d\varphi_{\text{гр}})$$

Далее поступим следующим образом: выделим из этого выражения экспоненту $e^{\frac{\alpha}{a}\int x d\varphi_{\text{гр}}}$, т.е. выразим ее как функцию Δm и $\varphi_{\text{гр}}$. Решение несложно, поэтому приведем окончательный результат

$$e^{\frac{\alpha}{a}\int x d\varphi_{\text{гр}}} = C_1\Delta m e^{-\alpha\int\frac{d\varphi_{\text{гр}}}{\Delta m}}$$

Здесь C_1 – постоянная интегрирования.

Дифференцируя это равенство по $\varphi_{\text{гр}}$, получим

$$e^{\frac{\alpha}{a}\int x d\varphi} \cdot \frac{\alpha}{a}x = C_1\left[\frac{dm}{d\varphi_{\text{гр}}}e^{-\alpha\int\frac{d\varphi_{\text{гр}}}{\Delta m}} + e^{-\alpha\int\frac{d\varphi_{\text{гр}}}{\Delta m}}\left(-\frac{\alpha}{\Delta m}\right)\Delta m\right]$$

или

$$\frac{\alpha}{a}xe^{\frac{\alpha}{a}\int x d\varphi} = C_1\frac{dm}{d\varphi_{\text{гр}}}e^{-\alpha\int\frac{d\varphi_{\text{гр}}}{\Delta m}} - C_1\alpha e^{-\alpha\int\frac{d\varphi_{\text{гр}}}{\Delta m}}$$

Т.к. при начальных условиях ($\varphi_{\text{гр}}= 0$) $(\frac{dm}{d\varphi_{\text{гр}}})_0=\alpha$,

то из последнего равенства следует

$$x_0(e^{\frac{\alpha}{a}\int x d\varphi_{\text{гр}}})_{\varphi_{\text{гр}}=0} = 0 \qquad (55)$$

Отсюда опять следует, что $x \neq 1$, т.к. при $x = 1$ левая часть выражения (55) обращается в единицу. Более того, отсюда следует, что

$$x_0 = 0 \qquad (56)$$

В противном случае (т.е. $x_0 \neq 0$) мы должны положить

$$(e^{\frac{\alpha}{a}\int x d\varphi_{\text{гр}}})_{\varphi_{\text{гр}}=0} = 0,$$

а это возможно только в том случае, когда

$$(\int x d\varphi_{\text{гр}})_{\varphi_{\text{гр}}=0} = -\infty,$$

что в свою очередь приводит к результату

$$x_0 = -\infty,$$

а это противоречит всякому физическому смыслу.

Итак, установлено, что $x_0 = 0$. Этот результат чрезвычайно важен с физической точки зрения, т.к. отсюда следует, что заряд, по крайней мере при малых скоростях, меняется. Действительно, возвращаясь к выражению (7) видим, что при $V \to 0$

$$\Delta e = -\Delta m \frac{\varphi_{\text{гр}}}{\varphi_{\text{эл}}} \qquad (57)$$

т.е. заряд, хоть и чрезвычайно слабо, но убывает.

Добавим еще здесь, что тот же результат получается и при интегрировании уравнения (47) в определенных интегралах.

А теперь рассмотрим поведение заряда при предельных скоростях, т.е. при $V^2 \to {}^{a}/_{\alpha}$.

Предварительно проделаем следующее: выразим x из уравнения (47)

$$x = \frac{a}{\alpha}\left(\frac{\frac{dm}{d\varphi_{\text{гр}}} - \alpha}{\Delta m}\right) \qquad (58)$$

а из (42) следует

$$\frac{dm}{d\varphi_{\text{гр}}} = \frac{\alpha}{2a{m_0}^2} \cdot \frac{dV^2}{d\varphi_{\text{гр}}} m^3$$

Для краткости записи будем обозначать производную по $\varphi_{\text{гр}}$ через запятую, как это обычно и принято. Тогда подставляя последнее выражение в (58) получим

$$x = \frac{a}{\alpha}\left(\frac{\frac{\alpha}{2a{m_0}^2}V^{2\prime}m^3 - \alpha}{\Delta m}\right) = \frac{a}{m_0}\left(\frac{\frac{V^{2\prime}m^3}{2a{m_0}^2} - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{a}V^2}} - 1}\right) = \frac{a}{m_0}\left[\frac{\frac{m_0 V^{2\prime}}{2a(1-\frac{\alpha}{a}V^2)^{3/2}} - 1}{(1-\frac{\alpha}{a}V^2)^{-1/2} - 1}\right] \qquad (59)$$

Опять же для краткости записи введем обозначение

$$(1 - \frac{\alpha}{a}V^2)^{-½} = y = \frac{m}{m_0} \quad \text{и} \quad \frac{m_0}{2a}\,V^{2\prime} = b$$

Отсюда при граничных условиях ($V^2 \to 0$ и $V^2 \to {}^{a}/_{\alpha}$) следует

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_\infty = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_\infty = \infty \end{cases} \tag{60}$$

Тогда выражение (59) запишется так

$$x = \frac{a}{m_0}\left(\frac{by^3-1}{y-1}\right)$$

Далее обычным делением дроби это выражение можно представить в виде

$$x = \frac{a}{m_0}\left(by^2 + by + b + \frac{b-1}{y-1}\right)$$

Тогда при $V^2 \to {}^{a}/_{\alpha}$ и с учетом граничных условий (60) следует

$$x_\infty = \frac{a}{m_0}(by^2 + by) = \frac{a}{m_0}\,by\,(y+1) \tag{61}$$

Но $\lim_{\varphi_{\text{гр}}\to\infty}(y+1) = \infty$, как это видно из (60)

Следовательно, $\lim_{\varphi_{\text{гр}}\to\infty} by = 0$, в противном случае мы должны положить $x_\infty = \infty$, а это, как видно из (7), ведет к бесконечному возрастанию заряда, что противоречит и всякому здравому смыслу и эксперименту.

Следовательно, выражение (61) приходит к виду

$$x_\infty = \frac{a}{m_0}\lim_{\varphi_{\text{гр}}\to\infty} by^2 \tag{62}$$

Представим это выражение в следующем виде

$$x_\infty = \frac{a}{m_0}\cdot\lim\left(\frac{by}{\frac{1}{y}}\right)$$

и тогда по правилу Лопиталя можно записать

$$x_\infty = \frac{a}{m_0}\cdot\frac{\lim_{\varphi_{\text{гр}}\to\infty}(by)'}{\lim_{\varphi_{\text{гр}}\to\infty}(\frac{1}{y})'} \tag{63}$$

Найдем отдельно производные

$$(by)' = \left(\frac{m_0}{2a}\,V^{2\prime}\cdot\frac{m}{m_0}\right)' = \frac{1}{2a}\left(V^{2\prime\prime}m + m'V^{2\prime}\right)$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{m'}{m_0}\cdot\frac{{m_0}^2}{m^2} = -\frac{m'm_0}{m^2} = -m_0\cdot\frac{\alpha}{2a{m_0}^2}\cdot V^{2\prime}m = -\frac{\alpha}{2am_0}\cdot V^{2\prime}m$$

Тогда

$$\frac{m_0}{a}x_\infty = \frac{\frac{1}{2a}(V^{2\prime\prime}m + m'V^{2\prime})}{-\frac{\alpha}{2am_0}\cdot V^{2\prime}m} = -\frac{m_0}{\alpha}\left(\frac{V^{2\prime\prime}}{V^{2\prime}} + \frac{m'}{m}\right)_\infty \tag{64}$$

Но из (63) следует

$$x_\infty = \frac{m_0}{a}(by^2)_\infty = \frac{m_0}{a}\left(\frac{\frac{m_0}{2a}V^{2\prime}}{1-\frac{\alpha}{a}V^2}\right)_\infty = \frac{{m_0}^2}{2a^2}\left(\frac{V^{2\prime}}{1-\frac{\alpha}{a}V^2}\right)_\infty = -\frac{{m_0}^2}{2a^2}\left(\frac{V^{2\prime\prime}}{\frac{\alpha}{a}V^{2\prime}}\right)_\infty = -\frac{{m_0}^2}{2a\alpha}\left(\frac{V^{2\prime\prime}}{V^{2\prime}}\right)_\infty$$

Последнее выражение можно переписать так

$$\left(\frac{V^{2\prime\prime}}{V^{2\prime}}\right)_\infty = -\frac{2a\alpha}{{m_0}^2}x_\infty \;,$$

а из (58) при $V^2 \to a/\alpha$

$$\frac{\alpha}{a}x_\infty = \left(\frac{m'}{\Delta m}\right)_\infty = \left(\frac{m'}{m}\right)_\infty$$

Подставляя эти выражения в (64), получим

$$\frac{\alpha}{a}x_\infty = \frac{2a\alpha}{{m_0}^2}x_\infty - \frac{\alpha}{a}x_\infty$$

или

$$2\frac{\alpha}{a}x_\infty\left(1-\frac{a^2}{{m_0}^2}\right) = 0 \;,$$

откуда следует

$$x_\infty = 0$$

Тот же результат можно получить гораздо проще и быстрее другим способом. И хоть это доказательство вызывает некоторые сомнения по поводу его корректности, все же приведем его здесь.

Из (58) имеем

$$x = \frac{a}{\alpha}\left(\frac{m' - \alpha}{\Delta m}\right)$$

а ранее (43) говорилось, что Δm можно представить в виде ряда

$$\Delta m = \alpha\varphi_{\text{гр}} + \beta{\varphi_{\text{гр}}}^2 + \gamma{\varphi_{\text{гр}}}^3 + \ldots + \text{к}{\varphi_{\text{гр}}}^n + \ldots$$

Тогда

$$m' = \alpha + 2\beta\varphi_{\text{гр}} + 3\gamma{\varphi_{\text{гр}}}^2 + \ldots + \text{к}n{\varphi_{\text{гр}}}^{n-1} + \ldots$$

и

$$x = \frac{a}{\alpha}\left(\frac{2\beta\varphi_{\text{гр}} + 3\gamma{\varphi_{\text{гр}}}^2 + \ldots + \text{к}n{\varphi_{\text{гр}}}^{n-1} + \ldots}{\alpha\varphi_{\text{гр}} + \beta{\varphi_{\text{гр}}}^2 + \gamma{\varphi_{\text{гр}}}^3 + \ldots + \text{к}{\varphi_{\text{гр}}}^n + \ldots}\right)$$

Теперь, поделив числитель и знаменатель на ${\varphi_{\text{гр}}}^{n-1}$, получим

$$x = \frac{a}{\alpha}\left(\frac{\frac{2\beta}{\varphi^{n-2}} + \frac{3\gamma}{\varphi^{n-3}} + \ldots + pn + \ldots}{\frac{\alpha}{\varphi^{n-2}} + \frac{\beta}{\varphi^{n-3}} + \frac{\gamma}{\varphi^{n-4}} + \cdots + \frac{p}{\varphi^{-1}}}\right)$$

и сколько бы мы не брали членов разложения, при $\varphi_{\text{гр}} \to \infty$ в конечном счете получим

$$x_\infty = \frac{a}{\alpha}\lim_{\varphi_{\text{гр}}\to\infty}\frac{pn}{p\varphi} = 0$$

Итак, имеем следующее:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varphi_{\text{гр}} \to 0} x = x_0 = 0 \\ \lim\limits_{\varphi_{\text{гр}} \to \infty} x = x_\infty = 0 \end{cases}$$

Но тогда здравый смысл (и теорема Ролля) подсказывают, что должно существовать какое-то промежуточное значение потенциала $\varphi_{\text{гр}}$, при котором x имеет экстремум, т.е. в этой точке $x' = 0$

Тогда из (58) имеем

$$x' = \frac{a}{\alpha}\left(\frac{m''\Delta m - m'(m'-\alpha)}{\Delta m^2}\right) = 0$$

или

$$m''\Delta m - m'(m' - \alpha) = 0$$

Частным решением этого уравнения является решение $m_1{}' = \alpha$, откуда следует $x_1 = 0$. А раз $x = 0$ в точке экстремума, то это означает, что $x = 0$ во всем интервале потенциалов $0 - \varphi_{\text{гр}}$.

Подведем предварительный итог:

$x = 0$ при $\varphi_{\text{гр}} \to 0$

$x = 0$ при $\varphi_{\text{гр}} \to \infty$ ($V^2 \to {}^{a}/_{\alpha}$)

Возможно, в качестве частного решения $x = 0$ во всем интервале изменения $\varphi_{\text{гр}}$ от 0 до ∞

Добавлю еще следующее: кажется, удалось найти строгое доказательство того, что $x = 0$ во всем интервале значений $\varphi_{\text{гр}}$ от 0 до ∞, но это доказательство еще требует тщательной проверки. И есть еще одна причина, по которой его здесь нет; из условия $x = 0$ следуют важные выводы, позволяющие допустить простую и наглядную физическую модель, объясняющую не только КАК, но и главное, ПОЧЕМУ происходит увеличение массы и уменьшение заряда. Ведь СТО не дает ответа на этот вопрос. Она говорит только КАК, а ПОЧЕМУ растет масса – ответа нет.

Более того, эта наглядная модель позволяет допустить (и объяснить) хотя бы в качестве гипотезы саму причину тяготения. Говорить о столь серьезных вещах не имея никакого экспериментального подтверждения считаю преждевременным. Всякая теория хороша тогда, когда она хотя бы косвенно подтверждена экспериментально.

В аннотации говорилось, что предложен эксперимент, в котором такая экспериментальная проверка возможна. Вот об этом сейчас и поговорим.

§ 6. ПРЕДЛАГАЕМЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ПРОВЕРКЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАРЯДА

Напрямую заметить изменение заряда практически невозможно. Ранее говорилось, что была предпринята такая попытка, в которой заряд измерялся с точностью до 10^{-29} ед. СИ, и эта попытка дала отрицательный результат. И не удивительно. Расчет, сделанный по формуле (57) для электрона в атоме Бора дает значение Δq = –2·10^{-63} ед. СИ. Но еще в далекие студенческие годы мне попалась на глаза работа, в которой отмечался странный факт; при работе на ускорителях реальная (измеренная) скорость разогнанных частиц <u>всегда</u> оказывалась несколько меньше расчетной. Объяснения этого, насколько мне известно, так и не было найдено. Попробуем объяснить это расхождение с новых позиций. Рассмотрим, как зависит скорость от разгоняющего потенциала в двух случаях:

– при неизмененном заряде (т.е. x = 1)
– при переменном заряде (x = 0)

Из (42) следует

$$V^2 = \frac{a}{\alpha}\,[1-(\frac{m_0}{m})^2]$$

или после преобразований

$$\frac{a}{\alpha}V^2 = 1-\frac{1}{(1+\frac{\Delta m}{m_0})^2} \qquad (65)$$

Далее, чтобы задать функцию $\frac{a}{\alpha}V^2 = f\,(\varphi_{\text{гр}})$ следует определить вид функции $\Delta m = f\,(\varphi_{\text{гр}})$.

В первом случае (x = 1) из (48) имеем

$$m' = \alpha + \frac{\alpha}{a}\Delta m$$

или

$$\frac{dm}{\alpha+\frac{\alpha}{a}\Delta m} = d\varphi_{\text{гр}}\ ,$$

что после интегрирования дает

$$\Delta m = a\,(e^{\frac{\alpha}{a}\varphi_{\text{гр}}} - 1) \qquad (66)$$

Во втором случае (x = 0) из то же формулы следует

$$\Delta m = \alpha\varphi_{\text{гр}} \qquad (67)$$

Подставляя эти значения в (65), получаем вид функций $\frac{a}{\alpha}V^2 = f\,(\varphi_{\text{гр}})$

$$\begin{cases} \frac{a}{\alpha}V^2 = 1-\frac{1}{\left[1+\frac{a}{m_0}\left(e^{\frac{\alpha}{a}\varphi_{\text{гр}}}-1\right)\right]^2} \qquad (x=1) \qquad (68) \\ \frac{a}{\alpha}V^2 = 1-\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{m_0}\varphi_{\text{гр}}\right)^2} \qquad (x=0) \qquad (69) \end{cases}$$

Расчет, сделанный по этим формулам, представлен на рис. 1. При этом для упрощения расчета дробь $^{a}/_{m_0}$ была принята равной единице.

Из этого графика видно, что при x = 0 скорость действительно меньше той, которая рассчитывалась при неизменном заряде (x = 1). Более того, поскольку при $\varphi_{\text{гр}} \to \infty$ эти кривые сближаются, то при больших скоростях ($V^2 \to {}^{a}/_{\alpha}$) различие между этими кривыми становится все меньше и меньше. А это значит, что есть какой-то промежуточный потенциал φ_1, при котором различие скоростей максимально. На графике этот потенциал отмечен пунктиром. Полагаю, что экспериментаторов интересовали только частицы с максимальной энергией, т.е. с максимальной скоростью разгона, поэтому замер и расчет экспериментальной и расчетной скоростей производился только на заключительном этапе. По этой причине максимальное различие скоростей и не было замечено.

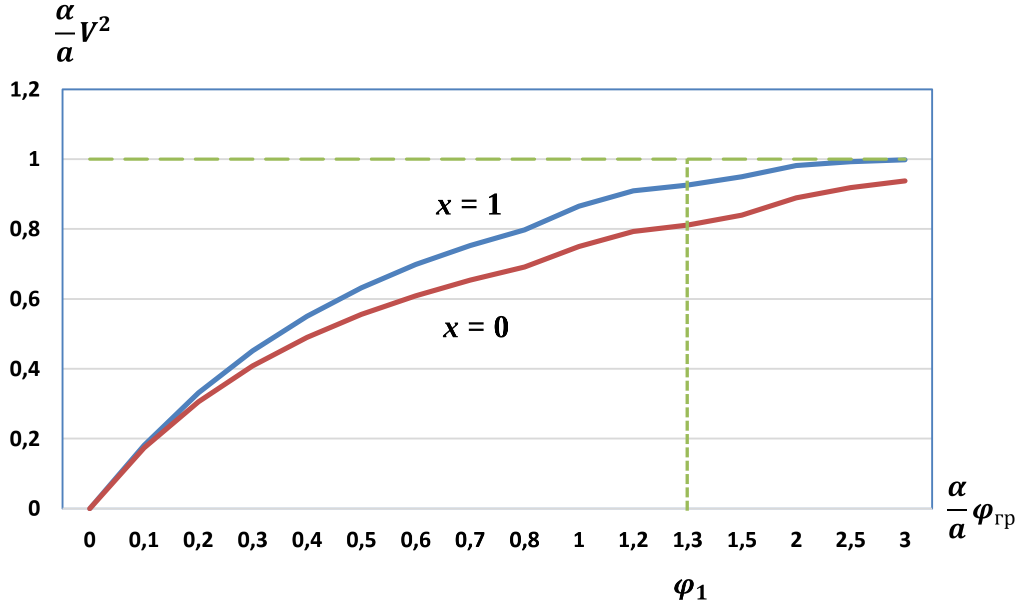

Рис. 1. Зависимость скорости от разгоняющего потенциала

По формулам (68) и (69) был сделан расчет и для других значений дроби a/m_0. На рис. 2 представлены данные этого расчета (кривые *1*, *2*, *3*) для значений $a/m_0 = 2$, $a/m_0 = 5$ и $a/m_0 = 10$ соответственно.

При этом для каждой частицы определялся потенциал φ_1, при котором разница скоростей при $x = 1$ и $x = 0$ максимальна.

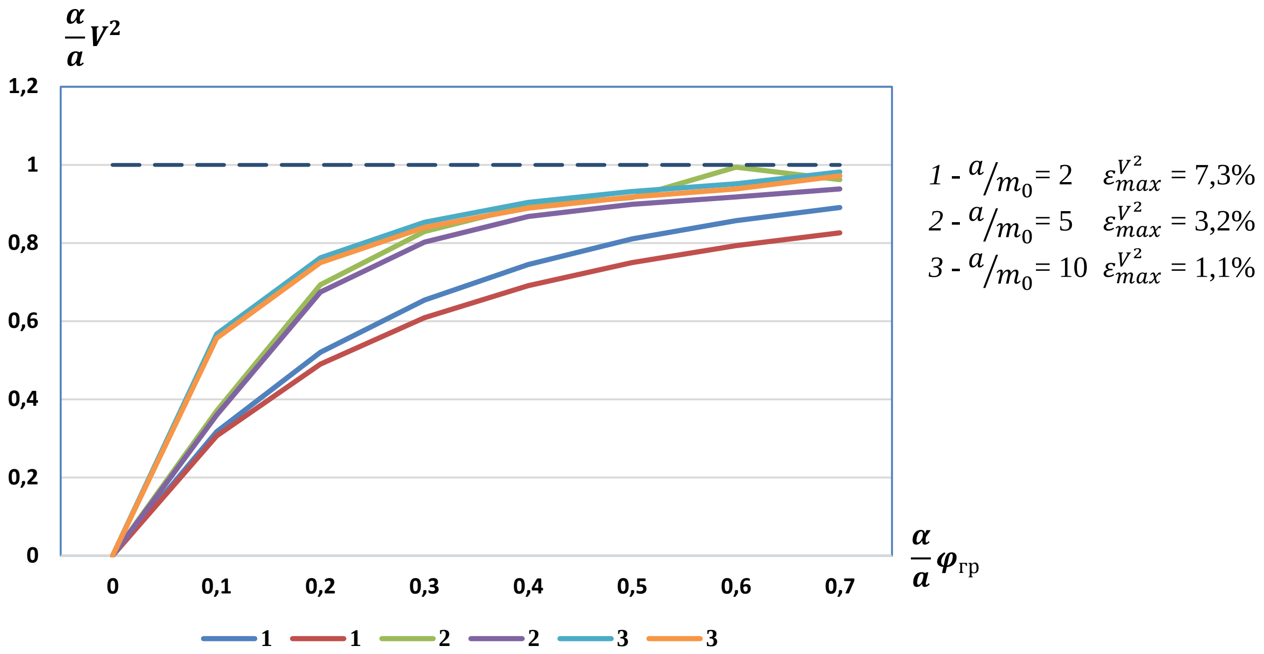

Рис. 2. Зависимость скоростей от разгоняющего потенциала для разных частиц

Обозначая квадраты скоростей при $x = 1$ и $x = 0$ через ${V_1}^2$ и ${V_2}^2$ соответственно, определялась относительная разность скоростей по формуле

$$\varepsilon = \frac{{V_1}^2 - {V_2}^2}{{V_1}^2} \cdot 100\%$$

Значения для максимальной разности квадратов скоростей приведены на графике. Они были рассчитаны для кривых *1, 2, 3* при значениях потенциалов $\frac{\alpha}{a}\varphi_1 = 0{,}7$, $\frac{\alpha}{a}\varphi_2 = 0{,}3$ и $\frac{\alpha}{a}\varphi_3 = 0{,}2$ соответственно.

Еще меньше эта разность получается если ее считать не для квадратов скоростей, а для самих скоростей. В этом случае по формуле

$$\varepsilon = \frac{V_1 - V_2}{V_1} \cdot 100\%$$

для кривых *1*, *2*, *3* соответственно имеем

$$\varepsilon_1^{max} = 1{,}8\%$$
$$\varepsilon_2^{max} = 1{,}6\%$$
$$\varepsilon_3^{max} = 0{,}84\%$$

Более наглядно эта ситуация представлена на рис. 3.

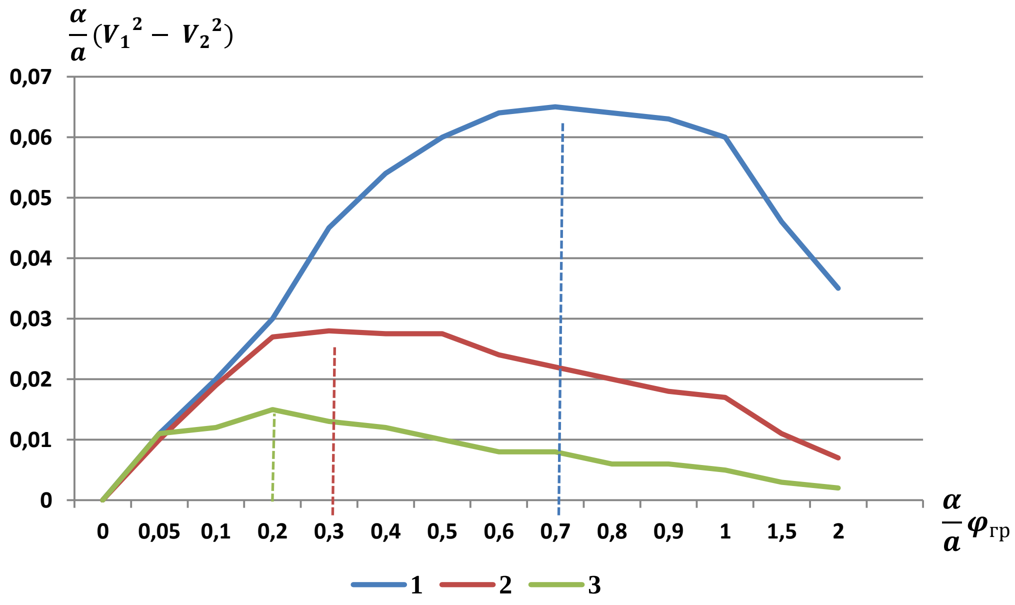

Рис. 3. Зависимость разности квадратов скоростей от разгоняющего потенциала при неизменном и переменном зарядах

Здесь кривые *1*, *2* и *3* соответствуют тем же кривым *1*, *2* и *3*, что на рис. 2.

Отсюда видно, что для более массивных частиц (и обладающих большим зарядом) максимальная разность квадратов скоростей смещается в сторону меньшего разгоняющего потенциала. Одновременно происходит и уменьшение этой разницы.

При этом следует отметить, что частицы с отношением $\frac{a}{m_0}$ = 2,5 и 10 – это некие гипотетические частицы, в реальность которых трудно поверить.

Так, если рассматривать электрон в полях тяготения протона или α-частицы, то там дробь $\frac{a}{m_0}$ составляет несколько десятков порядков, т.е. $\frac{a}{m_0} \gg 1$ и разница в скоростях при x = 1 и x = 0 становится совсем незначительной. И все же этот расчет представляется полезным уже тем, что он, во-первых, показывает наличие экстремума разности скоростей, и, во-вторых, показывает его смещение для разных частиц. И хотя ориентировочный расчет показывает, что для реальных частиц этот экстремум достигается практически при предельных скоростях, когда V^2 стремится к C^2 (или ${}^{a}/_{\alpha}$) и вряд ли достижим, все же представляется полезным провести следующий эксперимент.

Следует разогнать в ускорителе разные частицы до максимально допустимых скоростей (например, электрон, протон и α-частицу) и производить замер и расчет скоростей не только на заключительном этапе, но и во все время разгона через какой-то определенный интервал. И если при этом будут продублированы хотя бы левые части ветвей на рис. 2, то этот результат можно будет трактовать в пользу данной теории.

Впрочем, есть еще один вариант проверки теории. Следует разогнать частицу (или несколько частиц) до предельной скорости и также производить расчет и замер скорости через определенный интервал. Затем по известным формулам (66) и (67) рассчитать изменение массы при x = 1 и x = 0. Тогда в координатах ${}^{\Delta m}/_{a}$ – $\frac{\alpha}{a}\varphi_{гр}$ (или $\frac{\Delta m}{a}$ – разгоняющий потенциал) получим следующую картину

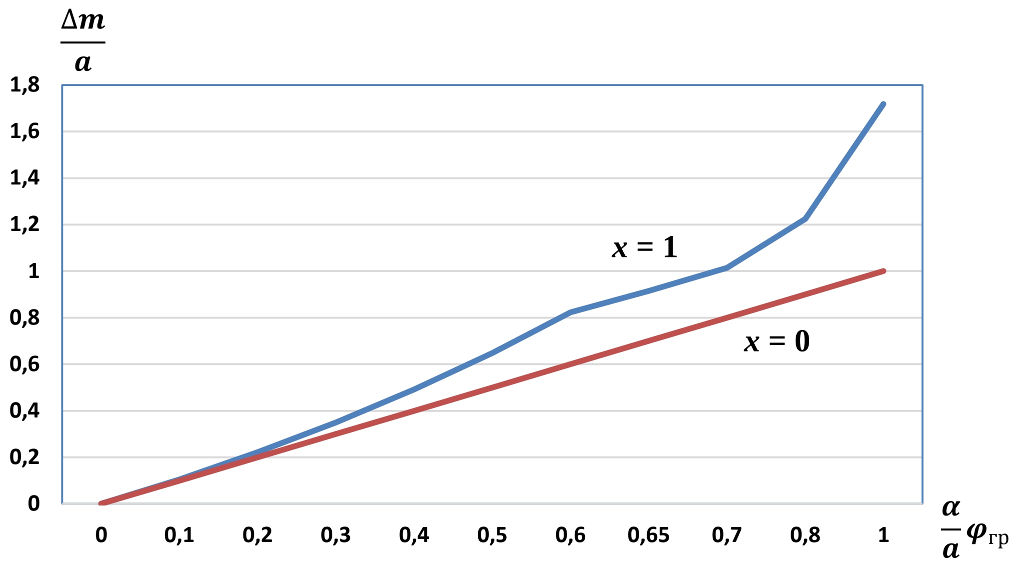

Рис. 4. Зависимость $\frac{\Delta m}{a}$ от разгоняющего потенциала при постоянном заряде (x = 1) и переменном (x = 0)

Предварительный расчет показывает, что расхождение между экспонентой ($x = 1$) и прямой ($x = 0$) будет заметно только при очень больших скоростях, но полагаю, что эксперимент все же позволит заметить этот эффект.

Тогда этот эффект или эффект, представленный на рис. 4 (или даже на рис. 3) позволит говорить о том, что получено косвенное подтверждение предлагаемой теории.

И уже с большей уверенностью и более детально можно будет говорить о тех важных следствиях и той наглядной физической модели процесса, которая вытекает из представления об изменчивости заряда.